Интегральное исчисление функций одной переменной.

План лекции.

- Первообразная
- Неопределенный интеграл
- Основные свойства неопределенного интеграла
- Методы интегрирования

Первообразная

Дана функция $f(x)$. Необходимо найти такую функцию *F*(x), производная которой равна $f(x)$, т.е. $F^{/}(x) = f(x)$

Другими словами, по производной $F^{/}(x)$ будем отыскивать саму функцию *F*(x), т.е. будем заниматься **интегрированием.**

Определение 1

$$\left.\begin{array}{l} F^{/}(x) = f(x) \\ x \in [a;b] \end{array}\right\} \Rightarrow F(x)$$ называется первообразной для функции $f(x)$ на отрезке [a;b].

Пример:

Найти первообразную для функции $f(x)=\cos x$

Известно, что $(\sin x)^{/}=\cos x$, следовательно $F(x)=\sin x$ - первообразная для *cosx.*

Но $(\sin x+1)^{/}=\cos x, (\sin x+C)^{/}=\cos x$ (С-*const*), т.е. первообразных *cos*x бесконечно много.

Можно доказать, что функции вида $\sin x+C$ исчерпывают все первообразные для функции $f(x)=\cos x$

Определение 2

$F'(x) = f(x) \Rightarrow F(x) + C = \int f(x)dx$ т.е. если *F(x)* – первообразная для $f(x)$,то семейство *F(x)*+*C*, обозначаемое символом $\int f(x)dx$, называется неопределенным интегралом функции $f(x)$ (*C*-*const*).

В символе $\int f(x)dx$

$\int$ - знак интеграла,

$f(x)$ - подинтегральная функция,

$f(x)dx$ - подинтегральное выражение.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

3. $\int dF(x) = F(x) + C,$ или $\int F'(x)dx = F(x) + C, C - const$

4. $\int \left(f_1(x) + f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$

5. $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$

Методы интегрирования

Для интегрирования функций $f(x)$, т.е. для нахождения семейства F(x)+C существуют:

1. Таблица основных интегралов
2. Методы интегрирования

Таблица основных интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n, C - const, n \neq -1$	9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ a > 0, a \neq 1, a - Const$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	10. $\int e^x dx = e^x + C$
3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	11. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, a \neq 0$
4. $\int \cos x dx = \sin x + C$	12. $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = arctgx + C$
5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C, a \neq 0$
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$	14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\lvert a\rvert} + C, a \neq 0$
7. $\int tgx dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$
8. $\int ctgx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a}\right\rvert + C, a \neq 0$

Методы интегрирования

а) «Полезное» правило.

Пусть $\int f(x)dx = F(x) + C$, где *F(x) – первообразная* для $f(x)$

Тогда $$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$$, где *k, b, C – const*

Метод непосредственного интегрирования

Определение Метод интегрирования, при котором интеграл с помощью тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется **непосредственным интегрированием.**

Таким образом, алгоритм действий следующий:

1. тождественное преобразование подынтегральной функции;
2. применение свойств неопределенного интеграла: вынесение константы за знак интеграла, представление интеграла от суммы функций в вид суммы интегралов;
3. использование таблицы интегралов.

В простейших примерах для применения непосредственного интегрирования достаточно разложить подынтегральную функцию на слагаемые и постоянные величины вынести за знак интеграла.

При определенной практике интегрирования обычно эти действия проводят устно, записывая лишь результат интегрирования.

2. Внесение под знак дифференциала

В формуле неопределенного интеграла величина dx означает, что берется дифференциал от переменной x. Можно использовать некоторые свойства дифференциала, чтобы, усложнив выражение под знаком дифференциала, тем самым упростить нахождение самого интеграла. Для этого используется формула

$$y'(x)dx = dy(x)$$

Если нужная функция $y(x)$ отсутствует, иногда ее можно образовать путем алгебраических преобразований.

Пример

Задание. Внесением под дифференциал найти неопределенный интеграл $\int \cos(2x)dx$

Решение. Внесем $2x$ под знак дифференциала, тем самым приведя исходный интеграл к табличному.

$$\int \cos(2x)dx = \int \cos(2x) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot dx = \int \cos(2x) \cdot \frac{1}{2} \cdot d(2x) =$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos(2x)d(2x) = \frac{1}{2} \int d(\sin 2x) = \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

Ответ. $\int \cos(2x)dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$

3. Интегрирование заменой переменной

Интегрирование заменой переменной или методом подстановки. Пусть $x=\phi(t)$, где функция $\phi(t)$ имеет непрерывную производную $\phi'(t)$, а между переменными x и t существует взаимно однозначное соответствие. Тогда справедливо равенство

$$\int f(x)dx=\int f(\phi(t))\cdot\phi'(t)\cdot dt$$

Определенный интеграл зависит от переменной интегрирования, поэтому если выполнена замена переменных, то обязательно надо вернуться к первоначальной переменной интегрирования.

Пример

Задание. Найти интеграл $\int\frac{dx}{3-5x}$

Решение. Заменим знаменатель на переменную t и приведем исходный интеграл к табличному.

$$\int\frac{dx}{3-5x}\left\|\begin{array}{c}3-5x=t\\ -5dx=dt\\ dx=-\frac{dt}{5}\end{array}\right\|=\int\frac{-\frac{dt}{5}}{t}=-\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t}=$$

$$=-\frac{1}{5}\ln|t|+C=-\frac{1}{5}\ln|3-5x|+C$$

Ответ. $\int\frac{dx}{3-5x}=-\frac{1}{5}\ln|3-5x|+C$

4. Интегрирование по частям

Интегрированием по частям называют интегрирование по формуле

$$\int u dv = uv - \int v du$$

При нахождении функции v по ее дифференциалу dv можно брать любое значение постоянной интегрирования C, так как она в конечный результат не входит. Поэтому для удобства будем брать $C = 0$.

Использование формулы интегрирования по частям целесообразно в тех случаях, когда дифференцирование упрощает один из сомножителей, в то время как интегрирование не усложняет другой.

Пример

Задание. Найти интеграл $\int x \cos x dx$

Решение. В исходном интеграле выделим функции u и v, затем выполним интегрирование по частям.

$$\int x \cos x dx \left\| \begin{matrix} u = x & v = \sin x \\ du = dx & dv = \cos x dx \end{matrix} \right\| = x \sin x - \int \sin x dx =$$

$$= x \sin x + \cos x + C$$

Ответ. $\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C$

Примеры

1. Найти $\int \frac{dx}{2x+1}$

Подберем подходящий «табличный» интеграл : $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

Здесь $f(x) = \frac{1}{x}, F(x) = \ln|x|$

В нашем случае $\frac{1}{2x+1} = f(2x+1)$ т.е. $kx + b = 2x + 1$, где k =2.

Тогда $$\int \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2} F(2x+1) = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C$$

2. Найти $\int \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)dx$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, kx + b = -4x + \frac{\pi}{3} \Rightarrow k = -4$$

тогда $$\int \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)dx = -\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) + C$$